КІБЕРБЕЗПЕКА: освіта, наука, техніка
CYBERSECURITY: EDUCATION, SCIENCE, TECHNIQUE
№ 1 (33), 2026
ISSN 2663 – 4023

DOI 10.28925/2663-4023.2026.33.1224
УДК 519.83:330.4:339.9

Малюков Володимир Павлович
Провідний науковий співробітник
Відділ оптимізації керованих процесів імені В. М. Глушкова,
Інститут кібернетики Національної академії наук України, Київ, Україна
ORCID: 0000-0002-7533-1555
volod.malyukov@gmail.com

Яремич Валентин Романович
Асистент кафедри комп'ютерних систем, мереж та кібербезпеки
Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна
ORCID: 0000-0001-9557-9577
v.yaremych@nubip.edu.ua

Малюкова Інна Володимирівна
Провідний аналітик
Рейтингове агентство «Експерт-Рейтинг», Київ, Україна
ORCID: 0000-0002-7207-539X
imalyukova82@gmail.com

МОДЕЛЬ ПРОТИСТОЯННЯ ЕКОНОМІК У РАМКАХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГРИ ЯКОСТІ

Анотація. У статті розроблено та досліджено математичну багатофакторну модель протистояння економік, побудовану на принципах диференціальних ігор якості, що класифікуються як ігри на виживання. Актуальність дослідження зумовлена сучасною напруженою міжнародною ситуацією, де економічна складова конфліктів відіграє критичну роль у досягненні стратегічного результату. Запропоновано модель, в який стан кожної економіки описується як n-вимірний (для першого гравця) та m-вимірний (для другого гравця) вектори вартостей продуктів у широкому розумінні від промислових та сільськогосподарських товарів до озброєння та фінансових інструментів. Динаміка конфлікту формалізована через систему білінійних диференціальних рівнянь, які враховують темпи зростання або спаду економічних показників (α, β), матриці внутрішніх технологічних трансформацій (R, F) та коефіцієнти взаємного впливу сторін (s_1, s_2). Також розглянуто задачу стратегічного управління ресурсами. Відповідно, гравці обирають частку активів для впливу на опонента (військова сфера), що змушує іншу сторону витрачати ресурси на нейтралізацію цих дій. У рамках позиційної диференціальної гри визначено умови завершення протистояння, що включають перемогу однієї зі сторін, взаємну поразку або продовження боротьби . Розв'язання задачі дозволило знайти множини переваг гравців та їхні оптимальні стратегії. Практична значущість моделі підтверджена серією обчислювальних експериментів у програмному середовищі PyCharm. Результати моделювання віддзеркалюють умовні траєкторії конфлікту та можуть бути використані як математичне ядро для систем підтримки прийняття рішень (СППР) у сферах прогнозування економічної безпеки та оцінки конкурентоспроможності суб'єктів електронної комерції. Запропонована модель відкриває перспективи для аналізу складних конфліктних ситуацій з урахуванням інформаційної асиметрії сторін.

Ключові слова: економіка, диференціальна гра якості, гра на виживання, оптимальна стратегія, фінансові ресурси, множина переваг, математичне моделювання.

ВСТУП

Наразі міжнародна ситуація є надзвичайно напруженою. Конфлікти спалахують у різних регіонах світу, які часто переходять з холодної фази до гарячої. У такій ситуації країни починають використовувати всілякі інструменти для впливу на своїх опонентів. І тут слід зазначити, що окрім військової складової інструментарію кожної країни, економічна складова також відіграє величезну роль, без якої неможливо розраховувати на бажаний результат конфлікту, особливо якщо він триватиме достатньо довго.

Постановка проблеми. Важливу роль у таких конфліктах відіграє реальний аналіз потенціалу сторін конфлікту, що вимагає використання моделювання протистояння сторін не лише для отримання прогнозу, а й для правильного політичного вирішення цієї конфронтації. Це може допомогти уникнути небажаних і часом трагічних наслідків для сторін конфлікту. При моделюванні протистояння сторін корисно використовувати економічно-математичний апарат, який включає методи теорії ігор і, зокрема, теорії ігор диференціальної якості. Отже, виходячи з цього, в статті пропонується підхід до моделювання протистояння економік, заснований на вбудовуванні процесу протистояння економік у рамки схеми диференціальної гри якості.

Слід зазначити, що аналіз конкурентного середовища вимагає використання математичного апарату, здатного враховувати жорстку взаємодію учасників ринку. Як показано далі у статті в сучасних дослідженнях протистояння економічних систем, доцільно розглядати такі процеси в рамках диференціальної гри якості, яка є грою на виживання. Розроблена математична багатофакторна модель, яка враховує динаміку розподілу обмежених фінансових ресурсів є надійною теоретичною основою для проєктованої інформаційної технології оцінки конкурентоспроможності підприємства електронної торгівлі. Використання такої моделі дозволить аналітично визначити характеристики параметрів взаємодії між економіками, прогнозувати результат конфронтації та приймати раціональні рішення для забезпечення фінансової безпеки підприємства.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує багато праць, присвячених розв'язанню диференціальних та багатокрокових ігор якості [1-16]. Слід зазначити, що в більшості праць про конфліктно-керовані процеси дослідники знаходять лише достатні умови для опису певних частин областей уподобань гравців, що з практичної точки зору цілком виправдано. У цьому відношенні слід, ймовірно, виділити перший прямий метод Л.С. Понтрягина [11], правило екстремального прицілювання Н.Н. Красовського [7-8] та метод розв'язувальних функцій Б.Н. Пшенічного [12]. Більш того, останні два методи досить ефективні для аналізу конфліктних ситуацій із групами учасників. Наведені напрями досліджень у галузі диференціальних ігор інтенсивно розвиваються і в даний час. Водночас відбувається «природне розширення» галузі досліджень, зокрема досліджень у сфері конфліктів, які характеризуються як конфлікти на виживання. Це пов'язано з тим, що взаємодія економік у сучасному світі не завжди має дружній, партнерський характер. На жаль, досить часто виникають випадки, коли між країнами виникають суперечності, що призводить до конфліктів, а часто й до військових дій. Внаслідок військових дій взаємодія між такими країнами набуває характеру так званих конфліктів на виживання або виснаження. В теорії ігор такі конфлікти називаються іграми на виживання. Аналіз і розв'язання таких ігор є дуже корисним для сторін конфлікту.

Слід зазначити, що достатня кількість науковців присвятила свої дослідження вирішенню таких конфліктних ситуацій. У 1915 році М. Осипов [14] розглянув модель для обчислення чисельності воюючих сторін. У 1916 році Ф. Ланчестер [15] також розглянув подібну математичну модель для обчислення чисельності воюючих сторін у конфлікті. Пізніше диференціальні рівняння, введені Ф. Ланчестером і М. Осиповим для обчислення чисельності воюючих сторін, стали відомі як рівняння Осипова-Ланчестера. У середині XX століття Р. Айзекс у своїй монографії [13] розглянув формалізацію диференціальних ігор на виживання та запропонував власні підходи до розв'язання таких ігор. Математичні моделі, які можна було б використовувати для розв'язання ігор на виживання, були вивчені у працях [16-18]. Усе вищезазначене веде до висновку, що, незважаючи на велику кількість робіт у галузі лінійних диференціальних та позиційних диференціальних ігор якості, розвиток нових підходів у сфері диференціальних ігор на виживання є нагальною потребою.

Мета статті – математична багатофакторна модель протистояння економік з урахуванням фінансових ресурсів (ФР) сторін у рамках диференціальної гри на виживання.

Для досягнення цієї мети було вирішено такі завдання:

1. Розробка на основі диференціальної гри якості моделі для пошуку оптимальних стратегій гравців у процесі аналізу конфлікту на виживання економік.
2. Апробація моделі в процесі обчислювальних експериментів.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Модель конфлікту на виживання економік, з урахуванням фінансових ресурсів сторін у рамках диференціальної гри якості. Наведемо формулювання задачі протистояння економік. Першим гравцем є економіка № 1, яка характеризується множиною вартостей продуктів у своїй країні, тобто стан економіки № 1 – це множина вартостей продуктів у країні. Більше того, продукти розуміються у широкому розумінні. Це сільськогосподарська та промислова продукція, включно зі зброєю, фінансовими продуктами тощо.

Вважається, що перший гравець має множина вартостей продуктів, який в певний момент $t=0$ характеризуються n-вимірним вектором початкового стану $x(0)\in R_+^n$.

Другим гравцем є економіка № 2, яка також характеризується множиною вартостей продуктів у своїй країні. Як і в економіці № 1, продукти розуміються у широкому сенсі.

Вважається, що другий гравець має множина вартостей продуктів, які в момент часу $t=0$ характеризуються m-вимірним вектором початкового стану $y(0)\in R_+^m$.

Позначимо через δ_{ij} $(i,j=1,...,n)$ величину, що характеризує величину вартості i-го продукту економіки № 1, який для свого відтворення використовує одиницю вартості j-го продукту економіки № 1, тобто $\gamma_{ij}=\delta_{ij}\cdot(e)_j$. Де $(e)_j$ – одиниця вартості j-го продукту економіки № 1, а γ_{ij} – вартість i-го продукту економіки № 1, який для свого відтворення використовує одиницю вартості j-го продукту економіки № 1. Через Δ_1 позначимо матрицю порядку n, складену з елементів δ_{ij}.

Через α $(\alpha\in[0,+\infty))$ позначимо темп зміни стану x економіки № 1. Якщо $\alpha\succ 1$, то темп зміни стану є темпом зростання, якщо $\alpha\prec 1$, то темп зміни стану є темпом спадання. У випадку $\alpha=1$ темп зміни стану характеризує сталість економічного процесу.

r_j $(j=1,...,n)$ елементи діагональної матриці R порядку n: $r_j\ge 0,\sum_{j=1}^{n} r_j=1$. Матриця R характеризує «структуру» множини вартостей продуктів економіки № 1. Елемент r_j означає частку j-тої величини множини вартостей продуктів економіки № 1, яка «перетворюється» в j-ту компоненту множини вартостей продуктів економіки № 1. Це означає наступне. Якщо існує множина вартостей продуктів економіки № 1 $(x_1,...,x_m)$, то в j-ту компоненту величини множини вартостей продуктів економіки № 1 «перетворюється» множина вартостей продуктів економіки № 1, що дорівнює $r_j\cdot(x_1,...,x_m)$.

Позначимо через w_{ij} $(i,j=1,...,m)$ величину, що характеризує величину вартості i-го продукту економіки № 2, який для свого відтворення використовує одиницю вартості j-го продукту економіки № 2, тобто $\rho_{ij}=w_{ij}\cdot(e^*)_j$. Де $(e^*)_j$ – одиниця вартості j-го продукту економіки № 2, а ρ_{ij} – вартість i-го продукту економіки № 2, який для свого відтворення використовує одиницю вартості j-го продукту економіки № 2. Через W_1 позначимо матрицю порядку m, складену з елементів w_{ij}. Через β $(\beta\in[0,+\infty))$ позначимо темп зміни стану економіки № 2. Якщо $\beta\succ 1$, то темп зміни стану є темпом зростання, якщо $\beta\prec 1$, то темп зміни стану є темпом спадання. У випадку $\beta=1$ темп зміни стану характеризує сталість економічного процесу.

f_j $(j=1,...,m)$ елементи діагональної матриці F порядку m: $f_j\ge 0,\sum_{j=1}^{m} f_j=1$. Матриця F характеризує «структуру» множини вартостей продуктів економіки № 2. Елемент f_j означає частку j-тої величини множини вартостей продуктів економіки № 2, яка «перетворюється» в j-ту компоненту множини вартостей продуктів економіки № 2. Це означає наступне. Якщо існує множина вартостей продуктів економіки № 2, $(y_1,...,y_m)$ то в j-ту компоненту величини множини вартостей продуктів економіки № 2 «перетворюється» множина вартостей продуктів економіки № 2, що дорівнює $f_j\cdot(y_1,...,y_m)$.

Позначимо через p_{ij} $(i=1,...,m;j=1,...,n)$ величину, що характеризує величину вартості i-го продукту економіки № 2, який є «еквівалентним» у своєму відтворенні одиниці вартості j-го продукту економіки № 1, тобто $\lambda_{ij}=p_{ij}\cdot(e)_j$. Де $(e)_j$ – одиниця вартості j-го продукту економіки № 1, а λ_{ij} – вартість i-го продукту економіки № 2, який у своєму відтворенні «еквівалентний» одиниці вартості j-го продукту економіки № 1. Через P_1 позначимо матрицю розмірності $m \times n$, що складається з елементів p_{ij}. Через $s_1 \cdot (s_1 \in [0,+\infty))$ позначимо коефіцієнт впливу економіки № 1 на економіку № 2.

Позначимо через q_{ij} $(i=1,...,n;\ j=1,...,m)$ величину, що характеризує об'єм вартості i-го продукту економіки № 1, який є «еквівалентним» у своєму відтворенні одиниці вартості j-го продукту економіки № 1, тобто $\theta_{ij} = q_{ij} \cdot (e^*)_j$. Де $(e^*)_j$ – одиниця вартості j-го продукту економіки № 2, а θ_{ij} – вартість i-го продукту економіки № 1, який для свого відтворення використовує одиницю вартості j-го продукту економіки № 2. Через Q_2 позначимо матрицю розмірності $n \times m$, що складається з елементів q_{ij}. Через $s_2(s_2 \in [0,+\infty))$ позначимо коефіцієнт впливу економіки № 2 на економіку № 1.

Введемо позначення:

h_j $(j=1,...,n)$ елементи діагональної матриці H порядку n: $h_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} h_j = 1$. Матриця H характеризує «структуру» множини вартостей продуктів економіки № 1. Елемент h_j означає частку j-тої величини множини вартостей продуктів економіки № 2, яка «перетворюється» в j-ту компоненту множини вартостей продуктів економіки № 1. Це означає наступне. Якщо існує множина вартостей продуктів економіки № 2 $(\omega_1,...,\omega_m)$, то в j-ту компоненту величини множини вартостей продуктів економіки № 1 «перетворюється» множина вартостей продуктів економіки № 2, що дорівнює $h_j \cdot (\omega_1,...,\omega_m)$.

σ_j $(j=1,...,m)$ елементи діагональної матриці Σ порядку m: $\sigma_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} \sigma_j = 1$. Матриця Σ характеризує «структуру» множини вартостей продуктів економіки № 2. Елемент σ_j означає частку j-тої величини множини вартостей продуктів економіки № 1, яка «перетворюється» в j-ту компоненту множини вартостей продуктів економіки № 2. Це означає наступне. Якщо існує множина вартостей продуктів економіки № 1 $(\xi_1,...,\xi_n)$, то в j-ту компоненту величини множини вартостей продуктів економіки № 2 «перетворюється» множина вартостей продуктів економіки № 1, що дорівнює $\sigma_j \cdot (\xi_1,...,\xi_n)$. Зауважимо, що якщо існує множина вартостей продуктів $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ економіки № 1, то, наприклад, операція: $P_1 \cdot \xi$, дає m-вимірний вектор , що представляє множину вартостей продуктів економіки № 2.

Фактично цей добуток дозволяє визначити лише одну компоненту цього m-вимірного вектору економіки № 2, оскільки весь вектор $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ буде «витрачений» лише на цю компоненту вартості продуктів економіки № 2. Для інших компонентів множини вартостей продуктів економіки № 2 більше не існує множини вартостей продуктів економіки № 1. Вся множина вартостей продуктів економіки № 1 «пішла» на «вирівнювання» з точки зору ефективності з одним компонентом множини вартостей продуктів економіки № 2. Подібне міркування справедливе для інших матриць і станів як економіки № 1, так і економіки № 2.

Тому необхідне розділення множини вартостей продуктів економіки № 1 на m частин, щоб можна було «вирівняти» ефективність множини вартостей продуктів економіки № 2 для всіх її компонентів із частками вартості продуктів. Для цього вводиться набір елементів σ_j.

Взаємодія конфліктів відбувається наступним чином.

Перший гравець, керуючи економікою № 1, маючи в певний момент t $(t \in [0,+\infty))$ часу стан вартостей продуктів $x(t) \in R_+^n$, перетворює його у стан $R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$. Де $R \cdot \Delta_1$ – матриця перетворення стану $x(t)$ першого гравця порядку n з додатними елементами, яка «налаштовує» структуру стану $x(t)$ першого гравця, враховуючи конфлікт з другим гравцем, який керує економікою № 2, до стану $R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$. Далі, використовуючи можливості своєї економіки, він виконує операцію трансформації свого стану $R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$ у стан $\alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$.

Потім він робить стратегічний хід через вибір величини $U(t) \cdot \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$. Тут $U(t)$ – діагональна матриця, що складається з елементів $u_i(t): 0 \leq u_i(t) \leq 1;\ i=1,...,n$. Величина $U(t) \cdot \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$ призначена для впливу на економіку № 2 (умовно можна вважати, що це множина вартостей продуктів економіки №

1, яка призначена для розвитку військової сфери). Це призводить до того, що другий гравець «змушений» виділяти додаткову множину вартостей своїх продуктів $s_1 \cdot \Sigma \cdot P_1 \cdot U(t) \cdot \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$, щоб «нейтралізувати» цю множину вартостей продуктів економіки № 1: $U(t) \cdot \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t)$.

Гравець, який керує економікою № 2, поводиться подібним чином.

Другий гравець, керуючи економікою № 2, маючи в певний момент часу t $(t \in [0,+\infty))$ стан вартостей продуктів $y(t) \in R_+^m$, перетворює його у стан $F \cdot W_1 \cdot y(t)$. Де $F \cdot W_1$ – матриця перетворення стану $y(t)$ першого гравця порядку m з додатними елементами, яка «налаштовує» структуру стану $y(t)$ другого гравця, враховуючи конфлікт з першим гравцем, який керує економікою № 1, до стану $F \cdot W_1 \cdot y(t)$ Далі, використовуючи можливості своєї економіки, він виконує операцію трансформації свого стану $F \cdot W_1 \cdot y(t)$ у стан $\beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t)$. Потім він робить стратегічний хід через вибір величини $V(t) \cdot \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t)$. Тут $V(t)$ – діагональна матриця, що складається з елементів $v_j(t): 0 \le v_j(t) \le 1;\ \ j = 1,...,m;$. Величина $V(t) \cdot \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t)$ призначена для впливу на економіку № 1 (умовно можна вважати, що це множина вартостей продуктів економіки № 2, які призначені для розвитку військової сфери). Це призводить до того, що перший гравець «змушений» виділяти додаткову множину вартостей своїх продуктів $s_2 \cdot H \cdot Q_2 \cdot V(t) \cdot \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t)$, щоб «нейтралізувати» цю множину вартостей продуктів економіки № 2: $V(t) \cdot \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t)$.

Тоді, виходячи з припущення, що множини вартостей продуктів пропорційно перетворюються з попередніх станів у наступні [20], отримуємо, що стани економік у момент часу $t \in [0,+\infty)$ задовольняють наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= -x(t) + \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t) - U(t) \cdot \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t) - s_2 \cdot H \cdot Q_2 \cdot V(t) \cdot \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t); \\ dy(t)/dt &= -y(t) + \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t) - V(t) \cdot \beta \cdot F \cdot W_1 \cdot y(t) - s_1 \cdot \Sigma \cdot P_1 \cdot U(t) \cdot \alpha \cdot R \cdot \Delta_1 \cdot x(t). \end{aligned} \tag{1}$$

У певний момент $t \in [0,+\infty)$ часу можливі наступні варіанти:

$$(x(t), y(t)) \in S_0, \tag{2}$$

$$(x(t), y(t)) \in F_0, \tag{3}$$

$$(x(t), y(t)) \in D_0, \tag{4}$$

$$(x(t), y(t)) \in H_0, \tag{5}$$

де

$$S_0 = \bigcup_{i=1}^{m} \{(x,y) : (x,y) \in R^{n+m}, x \succ 0, \quad y_i = 0\},\ F_0 = \bigcup_{i=1}^{n} \{(x,y) : (x,y) \in R^{n+m}, \quad y \succ 0, x_i = 0\}.$$

$$D_0 = \{\bigcup_{i=1}^{n} \{(x,y) : (x,y) \in R^{n+m}, x_i = 0\}\} \bigcap \{\bigcup_{i=1}^{m} \{(x,y) : (x,y) \in R^{n+m}, y_i = 0\}\},\ H_0 = \operatorname{int} R_+^{n+m}.$$

Якщо умова (2) виконана, процедура протистояння економік завершена. Економіка № 2 зазнала поразки в цьому протистоянні.

Якщо умова (3) виконана, процедура протистояння економік завершена. У цьому протистоянні Економіка № 1 зазнала поразки.

Якщо умова (4) виконана, процедура протистояння економік завершується. Обидві економіки зазнали поразки в цьому протистоянні.

Якщо умова (5) виконана, процедура протистояння економік триває.

Розглянута модель гри на виживання розв'язується в рамках схеми позиційної диференціальної гри якості [7]. У рамках цієї схеми розв'язуються два завдання: завдання 1 – з точки зору першого гравця-союзника та завдання 2 – з точки зору другого гравця- опонента. Розв'язок задачі 1 полягає у пошуку множин переваг першого гравця-союзника та його оптимальних стратегій [7], які мають властивість, що якщо початкові стани гри належать до множини переваг першого гравця-союзника, то його оптимальна стратегія дозволяє виконати умову (2), незалежно від дій суперника. Задача 2, з точки зору другого гравця-опонента, формулюється і розв'язується однаково, тому її не розглядатимемо.

Розв'язання задачі 1.

Введемо позначення: $G_1 = \alpha \cdot R \cdot \Delta_1$; $G_2 = \beta \cdot F \cdot W$; $S_1 = s_1 \cdot \Sigma \cdot P_1$; $S_2 = s_2 \cdot H \cdot Q_2$.

КІБЕРБЕЗПЕКА: освіта, наука, техніка № 1 (33), 2026
CYBERSECURITY: EDUCATION, SCIENCE, TECHNIQUE ISSN 2663 – 4023

Розв'язання задачі 1 залежить від співвідношення параметрів, які визначають процедуру протистояння між гравцем-союзником і другим гравцем-опонентом. Запишемо розв'язок задачі у випадку, коли співвідношення між параметрами такі: $S_1 \cdot G_1 \cdot S_2 \le G_2$, $G_2 \cdot S_1 \ge S_1 \cdot G_1$, $S_2 \succ 0$ (це матричні нерівності), $S_2 \cdot G_2 \cdot S_1$ – діагональна матриця;

$$[\{\{[\sum_{\theta=1}^{m}(S_2 \cdot G_2)_{i\theta} /(\sum_{j=1}^{m}(S_2 \cdot G_2)_{ij})] \cdot [(S_1 \cdot G_1)_{\theta 1} + \ldots + (S_1 \cdot G_1)_{\theta n}\} / ,$$

$$[(S_2 \cdot G_2)_{i1} + \ldots + (S_2 \cdot G_2)_{\theta i}]\}^{0.5} \ge \max(\rho_i, \mu_i)$$

$$\rho_i = \max_j [(S_2 \cdot G_2)_{ij} /[\sum_{j=1}^{m}(S_2 \cdot G_2)_{ij}]/(S_2)_{ij}]' \; \mu_i = (S_2 \cdot G_2 \cdot S_1)_{ii} /[\sum_{j=1}^{m}(S_2 \cdot G_2)_{ij}]$$

Введемо позначення:

$$V_1 = \{(x(0), y(0)) : (x(0), y(0)) \in R_+^{n+m}, [(G_2^{i,\Sigma})/(S_1 \cdot G_1)^{i,\Sigma}] \cdot [y(0)]_i \prec$$

$$\sum_{j=1}^{n}(S_1 \cdot G_1\}_{ij} \cdot x_j(0), \exists i : i = 1,\ldots,m;\}$$

$$V^* = \{(x(0), y(0)) : (x(0), y(0)) \in R_+^{n+m}, (q_*)_i \cdot (x(0))_i \ge$$

$$[\sum_{\theta=1}^{m}(S_2 \cdot G_2)_{i\theta} \cdot (y(0))_\theta]/[\sum_{j=1}^{m}(S_2 \cdot G_2)_{ij}], \forall i = 1,\ldots,n;\},$$

де $(q_*)_i = [G_2^{i,\Sigma} /(S_1 \cdot G_1)^{i,\Sigma}]$ $(G_2^{i,\Sigma})$ сума елементів i – рядок матриці G_2, $(S_1 \cdot G_1)^{i,\Sigma}$ – сума елементів i матричного рядка $S_1 \cdot G_1$. $\Psi = V_1 \cap V_1^*$.

Тоді множина переваг Ψ першого учасника – це Ψ множина , а її оптимальна стратегія – це $U^*(.,.) : R_+^n \times R_+^m \mapsto R_+^n, U^*(x, y) = E$ – матриця функціональних одиниць порядку n, у $(x, y) \in \Psi$ точці ; і яка не визначена в $(x, y) \notin \Psi$ точці.

Обчислювальні експерименти проводилися за допомогою дистрибутиву Anaconda (програмне середовище PyChar Professional). Проведене комп'ютерне моделювання дозволило проаналізувати результати гри. Внаслідок аналізу були виявлені деякі недоліки, а саме, недоліком моделі є той факт, що отримані дані для прогнозної оцінки при виборі тієї чи іншої стратегії управління взаємодією гравців не завжди збігаються з фактичними даними. Однак на цьому етапі досліджень це нормально, адже поки що тестували лише модель. У разі успішного тестування та підтвердження коректності відповідний програмний продукт у формі СППР буде реалізовано на кількох реальних проєктах.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглядається дволінійна диференціальна гра на виживання між двома економіками. Розв'язок гри розглядався в рамках диференціальної гри якостей двох гравців із повною інформацією, у випадку, коли стани гравців характеризуються багатовимірними значеннями. Вона була отримана методом граничного переходу розв'язків багатокрокових ігор у рамках схеми багатокрокових позиційних ігор із повною інформацією. Запропонований підхід є новим і дозволяє застосовувати їх до більш складних диференціальних ігор, зокрема, з урахуванням різниці інформації сторін. Отримані в роботі результати можуть слугувати математичним ядром систем підтримки прийняття рішень (СППР) для аналізу реальних конфліктних ситуацій. Чисельні експерименти, проведені, підтвердили ефективність розробленого підходу.

Перспективною сферою практичного застосування розглянутої моделі білінійної диференціальної гри на виживання є її алгоритмічна реалізація у спеціалізованих програмних комплексах. Зокрема, результати розв'язання цієї гри можуть слугувати математичним ядром СППР для аналізу реальних конфліктних ситуацій. У рамках дослідження розглядається можливість розробки інформаційних технологій для оцінки конкурентоспроможності підприємства електронної комерції. Впровадження запропонованої моделі в таких інформаційних технологіях автоматизує пошук оптимальних стратегій гравців і візуалізує результати протистояння для аналітиків, які прогнозують ринкову позицію підприємства.

ПОДЯКА

Роботу виконано за часткової підтримки проєкту №2.3/26-П Національної академії наук України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Logiewa, R., Hoffmann, F., Govaers, F., & Koch, W. (2023, November). Dynamic pursuit-evasion scenarios with a varying number of pursuers using deep sets. In *2023 IEEE Symposium Sensor Data Fusion and International Conference on Multisensor Fusion and Integration (SDF-MFI)* (pp. 1-7). IEEE. https://doi.org/10.1109/sdf-mfi59545.2023.10361514
2. Fang, X., Wang, C., Xie, L., & Chen, J. (2020). Cooperative pursuit with multi-pursuer and one faster free-moving evader. *IEEE Transactions on Cybernetics*, *52*(3), 1405-1414. https://doi.org/10.1109/tcyb.2019.2958548
3. Yuchen, H., Hongjian, W., Yudan, Y. D., & Wangzhao, W. (2021). Research on multi-UUV pursuit-evasion game strategies under the condition of strongly manoeuvrable evader. In *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)* (pp. 5504-5511). IEEE. https://doi.org/10.23919/ccc52363.2021.9550358
4. Lee, Y., & Bakolas, E. (2021). Relay pursuit of an evader by a heterogeneous group of pursuers using potential games. In *2021 American Control Conference (ACC)* (pp. 3182-3187). IEEE. https://doi.org/10.23919/acc50511.2021.9482912
5. Silveira, J., Cabral, K., Rabbath, C. A., & Givigi, S. (2023, June). Deep reinforcement learning solution of reach-avoid games with superior evader in the context of unmanned aerial systems. In *2023 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (pp. 911-918). IEEE. https://doi.org/10.1109/icuas57906.2023.10156154
6. Luo, Y., Jiang, X., Zhong, S., Ji, Y., & Sun, G. (2023). A multi-satellite swarm pursuit-evasion game based on contract network protocol and optimal Lambert method. In *Lecture Notes in Electrical Engineering* (pp. 2275-2285). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6613-2_222
7. Krasovskii, N. N. (1985). *Control of dynamic systems*. Nauka.
8. Krasovskii, N. N. (1970). *Game problems on the encounter of motions*. Nauka.
9. Chikrii, A. (1997). *Conflict-controlled processes*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
10. Chikrii, A. A., & Chikrii, G. T. (1979). Player information in discrete games. *Cybernetics*, *15*(5), 741-745. https://doi.org/10.1007/bf01071229
11. Pontryagin, L. S. (1988). *Selected scientific papers* (Vol. 2). Nauka.
12. Pshenichnyi, B. N., & Ostapenko, V. V. (1992). *Differential games*. Naukova Dumka.
13. Lanchester, F. W. (1918). *Aircraft in warfare: The dawn of the fourth arm*. D. Appleton & Company.
14. Isaacs, R. (1965). *Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*. Wiley.
15. Krass, I. A., Pinar, M. Ç., Thompson, T. J., & Zenios, S. A. (1994). A network model to maximize navy personnel readiness and its solution. *Management Science*, *40*(5), 647-661. https://doi.org/10.1287/mnsc.40.5.647
16. Malyukov, V. P. (1989). A constructive method of solving a differential game of quality with two terminal surfaces. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, *29*(2), 1-6. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90001-3
17. Makulov, K., Chikrii, A. A., Lakhno, V., Yagaliyeva, B., Malyukov, V., Malyukova, I., & Lakhno, M. (2025). Cloud platform selection model in the framework of differential quality game with fuzzy information. *IEEE Access*, *13*, 22578-22589. https://doi.org/10.1109/access.2025.3535814
18. Makarov, V. L., & Rubinov, A. M. (1977). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibria*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9886-1

Volodymyr Malyukov
Leading Researcher
Department of optimization of controlled processes of the V. M. Glushkov,
Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
ORCID: 0000-0002-7533-1555
volod.malyukov@gmail.com

Valentyn Yaremych
Assistant of Department of Computer Systems, Networks and Cybersecurity
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
ORCID: 0000-0001-9557-9577
v.yaremych@nubip.edu.ua

Inna Malyukova
Lead Analyst
Rating agency "Expert-rating", Kyiv, Ukraine
ORCID: 0000-0002-7207-539X
imalyukova82@gmail.com

MODEL OF ECONOMIC CONFRONTATION WITHIN THE FRAMEWORK OF DIFFERENTIAL GAMES OF QUALITY

Abstract. This article develops and investigates a multi-factor mathematical model of economic confrontation, built on the principles of differential games of quality, which are classified as games of survival. The relevance of the study is driven by the current tense international situation, where the economic component of conflicts plays a critical role in achieving strategic outcomes. The authors propose an approach where the state of each economy is described as an n-dimensional (for the first player) and m-dimensional (for the second player) vector of product values in a broad sense: ranging from industrial and agricultural goods to weaponry and financial instruments. The dynamics of the conflict are formalized through a system of bilinear differential equations that account for the growth or decline rates of economic indicators (α, β), matrices of internal technological transformations (R, F), and coefficients of mutual influence between the parties(s_1, s_2). Particular attention is paid to the strategic management of resources: players select a portion of assets to influence the opponent (e.g., the military sphere), forcing the other side to allocate additional resources to neutralize these actions. Within the framework of a positional differential game, conditions for concluding the confrontation are defined, including the victory of one of the parties, mutual defeat, or the continuation of the struggle. The solution to the problem enabled the identification of the players' advantage sets and their optimal strategies.
The practical significance of the model is confirmed by a series of computational experiments conducted in the PyCharm (Anaconda) software environment using an Intel i7 processor. The simulation results visualize conflict trajectories and can serve as a mathematical core for decision support systems (DSS) in the fields of economic security forecasting and competitiveness assessment for e-commerce entities. The proposed approach opens prospects for analyzing complex conflict situations while considering information asymmetry between the parties.

Keywords: economy, differential game of quality, survival game, optimal strategy, financial resources, set of advantages, mathematical modeling.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Logiewa, R., Hoffmann, F., Govaers, F., & Koch, W. (2023, November). Dynamic pursuit-evasion scenarios with a varying number of pursuers using deep sets. In *2023 IEEE Symposium Sensor Data Fusion and International Conference on Multisensor Fusion and Integration (SDF-MFI)* (pp. 1-7). IEEE. https://doi.org/10.1109/sdf-mfi59545.2023.10361514
2. Fang, X., Wang, C., Xie, L., & Chen, J. (2020). Cooperative pursuit with multi-pursuer and one faster free-moving evader. *IEEE Transactions on Cybernetics, 52*(3), 1405-1414. https://doi.org/10.1109/tcyb.2019.2958548

3. Yuchen, H., Hongjian, W., Yudan, Y. D., & Wangzhao, W. (2021). Research on multi-UUV pursuit-evasion game strategies under the condition of strongly manoeuvrable evader. In *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)* (pp. 5504-5511). IEEE. https://doi.org/10.23919/ccc52363.2021.9550358
4. Lee, Y., & Bakolas, E. (2021). Relay pursuit of an evader by a heterogeneous group of pursuers using potential games. In *2021 American Control Conference (ACC)* (pp. 3182-3187). IEEE. https://doi.org/10.23919/acc50511.2021.9482912
5. Silveira, J., Cabral, K., Rabbath, C. A., & Givigi, S. (2023, June). Deep reinforcement learning solution of reach-avoid games with superior evader in the context of unmanned aerial systems. In *2023 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)* (pp. 911-918). IEEE. https://doi.org/10.1109/icuas57906.2023.10156154
6. Luo, Y., Jiang, X., Zhong, S., Ji, Y., & Sun, G. (2023). A multi-satellite swarm pursuit-evasion game based on contract network protocol and optimal Lambert method. In *Lecture Notes in Electrical Engineering* (pp. 2275-2285). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6613-2_222
7. Krasovskii, N. N. (1985). *Control of dynamic systems*. Nauka.
8. Krasovskii, N. N. (1970). *Game problems on the encounter of motions*. Nauka.
9. Chikrii, A. (1997). *Conflict-controlled processes*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
10. Chikrii, A. A., & Chikrii, G. T. (1979). Player information in discrete games. *Cybernetics*, *15*(5), 741-745. https://doi.org/10.1007/bf01071229
11. Pontryagin, L. S. (1988). *Selected scientific papers* (Vol. 2). Nauka.
12. Pshenichnyi, B. N., & Ostapenko, V. V. (1992). *Differential games*. Naukova Dumka.
13. Lanchester, F. W. (1918). *Aircraft in warfare: The dawn of the fourth arm*. D. Appleton & Company.
14. Isaacs, R. (1965). *Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*. Wiley.
15. Krass, I. A., Pinar, M. Ç., Thompson, T. J., & Zenios, S. A. (1994). A network model to maximize navy personnel readiness and its solution. *Management Science*, *40*(5), 647-661. https://doi.org/10.1287/mnsc.40.5.647
16. Malyukov, V. P. (1989). A constructive method of solving a differential game of quality with two terminal surfaces. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, *29*(2), 1-6. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90001-3
17. Makulov, K., Chikrii, A. A., Lakhno, V., Yagaliyeva, B., Malyukov, V., Malyukova, I., & Lakhno, M. (2025). Cloud platform selection model in the framework of differential quality game with fuzzy information. *IEEE Access*, *13*, 22578-22589. https://doi.org/10.1109/access.2025.3535814
18. Makarov, V. L., & Rubinov, A. M. (1977). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibria*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9886-1

Отримано редакцією журналу / Received: 15.02.26
Прорецензовано / Revised: 27.02.26
Схвалено до друку / Accepted: 25.06.26